8月10日讲义：内容8.3，8.4

树里羁雏

2025 年 8 月 9 日

1 总述

我们这节课的主要内容是参考书上的8.3，8.4节，由于我菜菜的，所以基本不会涉及课外内容,同时，8.4节的最后两三页我也没看懂，所以没讲。

我们回顾之前讲的内容，我们在Z^d的子集Λ上建立了哈密顿量:

$$\mathcal{H} = \frac{\beta}{4d} \sum_{i,j \in \mathcal{E}_\Lambda^b} (\omega_j - \omega_i)^2 + \frac{m^2}{2} \sum_{i \in \Lambda} \omega_i^2$$

其中，ω是一个由Z^d向R的映射，代表了Z^d上每个格点的值，它在Λ^C外与某个η恒等。d代表空间的维数，β是逆温度，m是外磁场强度。其概率测度为：

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mu^\eta_{\lambda;\beta;m}(A) = \int \frac{e^{-\mathcal{H}_{\Lambda;\beta;m}(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c})}}{Z^\eta_{\Lambda;\beta;m}} 1_A(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c}) \prod_{i \in \Lambda} d\omega_i$$

由这个哈密顿量我们可以开始研究这个Gaussian Free Field模型，我们这节课只讨论$m = 0$的情形。

我们首先研究当Λ有限时的情形，为了将哈密顿量化为更加简单的形式，我们需要引入离散情况下的调和函数以及对应的分析技巧。借助这些工具我们成功地处理了Λ有限时的情形，然后我们将其极限至对无限的情形，建立Z^d下的Gibbs测度。

2 调和函数和Green恒等式在离散情况(Z^d)的建立

从讨论班开始到现在，我们始终都在Z^d以及其子集Λ上讨论问题，我们既然想把调和函数建立在Z^d的上面，我们就需要先在它上面将原本连续

的东西离散地定义出来。

定义1. Z^d上的一个函数$f = (f_i)_{i\in Z^d}$，$f_i \in R$是实数，可以将其看作$Z^d \to R$的一个映射。我们定义它的离散梯度（discrete gradient）为：

$$(\nabla f)_{ij} = f_j - f_i$$

定义2. 相应的，离散拉普拉斯算子（discrete Lapician）定义为：

$$(\triangle f)_i = \sum_{j:j\sim i} (\nabla f)_{ij}$$

（Lemma8.7） 根据这些定义立刻有：:

$$\sum_{i,j\in\mathcal{E}^b_\Lambda} (\nabla f)_{i,j} (\nabla g)_{i,j} = -\sum_{i\in\Lambda} g_i (\triangle f)_i + \sum_{i\in\Lambda j\in\lambda^c, j\sim i} g_j (\nabla f)_{ij} \tag{8.14}$$

$$\sum_{i\in\Lambda} (f_i(\triangle g)_i - g_i(\triangle f)_i) = \sum_{i\in\Lambda j\in\lambda^c, j\sim i} (f_j(\nabla g)_{ij} - g_j(\nabla f)_i j) \tag{8.15}$$

这些式子仅仅是对求和的重新组合而已，在此不作证明了，有兴趣的读者可以自行阅读参考书387页。

注意(8.14)，容易发现该式与连续的调和函数的性质极其相似。对于R^d上的光滑函数f, g。我们有：

$$\int_U \nabla f \cdot \nabla g dV = -\int_U g \triangle f dV + \oint_{\partial\Lambda} g(\nabla f \cdot n) dS$$

$$\int_U (f\triangle g - g\triangle f) dV = \oint_{\partial U} (f\nabla g \cdot n + g\nabla f \cdot n) dS$$

两式分别对应了（8.15）与（8.16）。

观察式8.14的右侧，前一项代表Λ的内部，而后一项代表Λ的边界。（8.15）可由（8.14）交换f, g并相减得到，在此不赘述了。

另一个值得注意的是$(\triangle f)_i$还有另一种写法：

$$(\triangle f)_i = \sum_{j\in Z^d} \triangle_{ij} f_j$$

其中

$$\triangle_{ij} = \begin{matrix} -2d & if & i=j \\ 1 & if & i\sim j \\ 0 & otherwise & \end{matrix}$$

我们现在开始处理这个式子：

$$\sum_{i,j\in\mathcal{E}^b_\Lambda}(f_j-f_i)^2$$

处理它的理由也很简单，我们会注意到这个式子长得极像哈密顿量$\mathcal{H}$。

$$\begin{aligned}\sum_{i,j\in\mathcal{E}^b_\Lambda}(f_j-f_i)^2 &= \sum_{i,j\in\mathcal{E}^b_\Lambda}(\nabla f)^2_{ij} \\ &= -f\cdot\triangle_\Lambda f - 2\sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda^c, j\sim i} f_i f_j + B_\Lambda \end{aligned} \tag{8.18}$$

从第一行到第二行应用了（8.14）。其中，符号$f\cdot\triangle_\Lambda g=\sum_{i,j\in\Lambda}\triangle_{ij}f_i g_j$（容易注意到$f\cdot\triangle_\Lambda g=g\cdot\triangle_\Lambda f$）。 B_Λ代表只和Λ^c相关的项，此后我们不研究它的具体形式了。

式（8.18）的思路是：将 $\sum_{i,j\in\mathcal{E}^b_\Lambda}(f_j-f_i)^2$分为三个部分，第一项只和$\Lambda$内部有关，第二项代表$\Lambda$边缘，第三项则是$\Lambda$外部的影响。注意到（8.18）是一个二次的式子，我们的目标是尝试通过一定程度的配方把（8.18）写作这样的形式：$(f-u)\cdot\triangle_\Lambda(f-u)$

计算有：

$$\begin{aligned}(f-u)\cdot\triangle_\Lambda(f-u) &= f\cdot\triangle_\Lambda f - 2f\cdot\triangle_\Lambda u + u\cdot\triangle_\Lambda u \\ &= f\cdot\triangle_\Lambda f - 2\sum_{i\in\Lambda} f_i(\triangle u)_i + 2\sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda_c, j\sim i} f_i u_j + B_\Lambda\end{aligned}$$

将该式代入（8.18），我们就可以得到：

$$\begin{aligned}\sum_{i,j\in\mathcal{E}^b_\Lambda}(f_j-f_i)^2 &= (f-u)\cdot\triangle_\Lambda(f-u) \\ &\quad - 2\sum_{i\in\Lambda} f_i(\triangle u)_i + 2\sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda_c, j\sim i} f_i(u_j-f_j) + B_\Lambda\end{aligned}$$

第二行的最后一项和Λ内部无关，不用管它.为使前两项恒为0，我们令：

$$(\triangle u)_i = 0\ \ \forall i \in \Lambda, \quad u_i = f_i\ \ \forall j \notin \Lambda$$

我们将$(\triangle u)_i = 0$称为“调和的”（harmonic）。于是便有lemma8.10：

若u在Λ 上调和，在Λ 的补集上等于f，那么:

$$\sum_{i,j\in\mathcal{E}_\Lambda^b} (f_j - f_i)^2 = (f-u)\cdot\triangle_\Lambda(f-u) + B_\Lambda$$

在得到这个式子之后，我们可以迈出下一步。

3　对m=0，有限情况下的研究

根据参考书381，382页，不失一般性，我们假设逆温度$\beta = 1$。我们讨论$m = 0$时的模型，假设边界条件为η,即$\eta_i = \omega_i \forall i \notin \Lambda$,此时哈密顿量:

$$\mathcal{H}_{\Lambda;0} = \frac{1}{4d}\sum_{i,j\in\mathcal{E}_\Lambda^b}(\omega_j - \omega_i)^2$$

根据lemma8.10，如果有u可以满足在Λ上调和，在Λ^c上恒等于η：

$$\mathcal{H}_{\Lambda;0} = \frac{1}{2}(\omega - u)\cdot(-\frac{1}{2d}\triangle_\Lambda)(\omega - u)$$

式子最后的B_Λ由于只和Λ外部有关，作为常值对配分函数无贡献，已经被略去了。

回顾$f\cdot\triangle_\Lambda g = \sum_{i,j\in\Lambda}\triangle_{ij} f_i g_j$，发现它相当于两个$|\Lambda|$维向量同一个方阵$\triangle_\Lambda = (\triangle_{ij})$相乘得到的实数。我们将$\omega - \mu$视作行向量，相对应的，我们可以发现概率测度$\mu$变成了：

$$\mu_{\lambda;1;0}^{\eta}(A) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}(\omega-\mu)\cdot(-\frac{1}{2d}\triangle_\Lambda)\cdot(\omega-u)^T}}{Z_{\Lambda;1;0}^{\eta}} 1_A(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda} d\omega_i$$

注意$e^{-\frac{1}{2}(\omega-\mu)\cdot(-\frac{1}{2d}\triangle_\Lambda)\cdot(\omega-u)^T}$,这已经和多元正态分布极其相似了，接下来我们需要证明两点，第一个是$-\frac{1}{2d}\triangle_\Lambda$确实是可逆方阵，第二个是我们之前假设的$\mu$确实存在。

3.1 $-\frac{1}{2d}\triangle_\Lambda$是可逆的

为此，我们先研究这个方阵：

$$-\frac{1}{2d}\triangle_\Lambda = I_\Lambda - P_\Lambda$$

I_Λ是单位阵，而$P_\Lambda = (P(i,j))_{(i,j)\in\Lambda}$，$P(i,j) = \frac{1}{2d}1_{i\sim j}$，$1_{i\sim j}$的意思是，当且仅当$i \sim j$时为1，否则为0。

考虑Z^d上的随机游走，每次向相邻的格点移动一步，用X_k来表示随机游走在第k步时到达的点。则我们会发现：我们刚刚定义出来的$P(j,k) = P_i(X_{n+1} = k|X_n = j)$（后一个式子中，$P$代表概率，下标$i$代表随机游走从$i$点出发，在下文中我们将会默认$i \in \Lambda$）

我们定义$\tau_{\Lambda^c} \overset{def}{=} inf\{k \geq 0 : X_k \in \Lambda^c\}$，即首次随机游走出$\Lambda$的时间。接下来我们要做一个重要的估计：

$Lemma\, 8.12\ \forall i \in \Lambda,\ \exists c\ not\ depends\ on\ i\ s.t.\ P_i(\tau_{\Lambda^c} > n) \leq e^{-cn}$

证明：我们令$R = sup_{l\in\Lambda}\{inf_{k\in\Lambda^c}||k-l||\}$其中$||k-l||$代表点$k,l$间的最短路径的长度，$R$也就是$\Lambda$中“最里面”的点到$\Lambda$外部的距离。由于$\Lambda$是有限的，所以$R$总是存在的。对于$\Lambda$中的每一个点，在游走$n$步内离开$\Lambda$的概率不小于$(2d)^{-R}$。于是我们有：

$$P_i(\tau_{\Lambda^c} > n) \leq (1-(2d)^{-R})^{[n/R]}$$

其中，$[n/R]$代表不大于n/R的最大整数。在得到该式之后，Lemma 8.2的成立也是自然的了。

有了这个估计，我们接下来就可以证明$I_\Lambda - P_\Lambda$确实可逆，更进一步，我们会给出它的逆：

$$G_\Lambda(i,j) \overset{def}{=} E_i[\sum_{n=0}^{\tau_{\Lambda^c}-1} 1_{\{X_n=j\}}]$$

其中，E表示期望，下标i代表这个随机游走是从点i开始的，通俗地来说，式子右侧代表一个点gi开始的随机游走，在离开Λ前走到点j的次数的期望。注意，我们这里先默认该期望存在。接下来我们证明这个G_Λ是$I_\Lambda - P_\Lambda$的逆。

$Proof:$

注意到这个等式：

$$(I_\Lambda - P_\Lambda)\sum_{k=0}^{n} P_\Lambda^k = I_\Lambda - P_\Lambda^{n+1}$$

我们要证明当n趋向于无穷时右侧等于I_Λ我们之前证明过$P_i(\tau_{\Lambda^c} > n) \leq e^{-cn}$,接下来注意到：

$$P_\Lambda^n(i,j) = \sum_{i_1,\cdots,i_n-1\in\Lambda} P(i,i_1)P(i_1,i_2)\cdots P(i_{n-1},j) = P_i(X_n = j, \tau_{\Lambda^c} > c)$$

由于$P_i(\tau_{\Lambda^c} > n) \leq e^{-cn} \to 0$因此自然$P_i(X_n = j, \tau_{\Lambda^c} > n) \to 0$。

于是我们可以得知$n \overset{lim}{\to} \infty\ (I_\Lambda - P_\Lambda)\sum_{k=0}^{n} P_\Lambda^k = I_\Lambda$进而$n \overset{lim}{\to} \infty \sum_{k=0}^{n} P_\Lambda^k = (I_\Lambda - P_\Lambda)^{-1}$

计算该式左侧：

$$(\sum_{k=0}^{\infty} P_\Lambda^k)(i,j) = \sum_{n\geq 0} P_i\{X_n = j, \tau_\Lambda^c > n\}$$

在上面的计算中我们又一次利用了本页顶部的公式来证明。

注意到右侧是等于$G_\Lambda(i,j)$的，因为它统计了随机游走中在离开Λ前每一步游走到点j的概率，这将会等于在离开Λ前游走到点j的次数的期望，具体证明不（我）赘（懒）述（得）了（写）。

于是我们证明了方阵$-\frac{1}{2d}\triangle_\Lambda$是可逆的。

3.2 满足条件的u存在

回顾我们的任务，我们为了证明该模型是多元正态分布，要求满足有u可以满足在Λ上调和，在Λ^c上恒等于η，我们现在证明它存在，并且要将它构造出来，构造的过程我们依然要依赖在3.1中构造的随机游走。

现在令$u_i = E_i[\eta_{X_{\tau^c}}]$,也就是它从$i$点出发“刚刚游走出$\Lambda$时”所在点在$\eta$上取值的期望。注意到如果$i \notin \Lambda$,那么$u_i = \eta_i$，因为它从一开始就离开了$\eta$。

在Λ中运用条件概率公式我们立刻可以得到：

于是我们证明了在Λ上$(\triangle u)_i = 0$。满足条件的u存在，证毕。